# Introducción a la teoría de conjuntos

Prof. Ignacio Lasalvia

# Conjunto

- Un conjunto debe ser una colección bien definida de objetos.

- Utilizaremos letras mayúsculas, como A,B,C,…,para representar los conjuntos y letras minúsculas para representar los elementos.

# Pertenencia

- Para un conjunto A, escribimos
  - $x \in A$ si x es un elemento de A
  - $y \notin A$ indica que y no es miembro de A

- Un conjunto puede designarse enumerando sus elementos dentro de llaves.

# EJEMPLO

– Si A es un conjunto formado por los cinco primeros enteros positivos A={ 1, 2, 3, 4, 5}
  - En este caso $2 \in A$ pero $6 \notin A$
– Otra notación común para este conjunto es

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 1 \leq x \leq 5\}$$

  - La barra vertical| que aparece dentro se lee como “ tal que”
  - {x|…} se lee como “el conjunto de todos los x tal que”
  - Las propiedades que van después de | nos ayudan a determinar los elementos del conjunto descrito.

# ¡Cuidado !

- La notación $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ NO es una descripción adecuada del conjunto A, a menos hayamos acordado previamente que los elementos considerados son enteros.
- Al adoptarse esa convención, decimos que estamos especificando un universo, que por lo general denotamos como U

- Si U denota el conjunto de todos los enteros o el conjunto de todos los enteros positivos , entonces $\{x \mid 1 \le x \le 5\}$ es una descripción adecuada de A.
- Si U es el conjunto de todos los números reales, $\{x \mid 1 \le x \le 5\}$ contendría todos los números reales entre 1 y 5 inclusive.
- Si U está formado solamente por enteros pares, los únicos miembros de $\{x \mid 1 \le x \le 5\}$ serían 2 y 4

# Cardinalidad

Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los enteros positivos, sean

**a)** $A = \{1, 4, 9, \ldots, 64, 81\} = \{x^2 | x \in \mathcal{U}, x^2 < 100\} = \{x^2 | x \in \mathcal{U} \wedge x^2 < 100\} = \{x \in \mathcal{U} | x^2 < 100\}$.

**b)** $B = \{1, 4, 9, 16\} = \{y^2 | y \in \mathcal{U}, y^2 < 20\} = \{y^2 | y \in \mathcal{U}, y^2 < 23\} = \{y^2 | y \in \mathcal{U} \wedge y^2 < 17\} = \{y^2 \in \mathcal{U} | y^2 \leq 16\}$.

**c)** $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2k | k \in \mathcal{U}\}$.

- A y B son conjuntos finitos , y C es un conjunto infinito.
- Para cualquier conjunto finito A, |A| es el número de sus elementos y se conoce como cardinalidad , o tamaño.
- Ej |A|= 9 y |B|= 4

# INCLUSIÓN

- Los conjuntos B y A son tales que todo elemento de B es también elemento de A
- DEFINICIÓN
  – Si C ,D son conjuntos del universo U, decimos que C es un subconjunto de D y escribimos $C \subseteq D$, o $D \supseteq C$ , si cada elemento de C es un elemento de D.

Esta definición se refiere al “sentido amplio” de la inclusión, contempla la posibilidad de que C sea D.

# INCLUSIÓN

- Si, además, D contiene un elemento que no está en C, entonces C es un subconjunto propio de D y se denota como $C \subset D$ o $D \supset C$.

# IGUALDAD

- U={1,2,3,4,5}, consideremos el conjunto A={1,2}. Si B={x|x.x € U} , entonces los miembros de B son 1,2. En este cado, A y B contienen los mismos elementos(y ninguno más), lo cual nos hace pensar que  los conjuntos A y B son iguales.
- También es cierto que $A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$

# IGUALDAD

- DEFINICIÓN
  - Para un universo U, los conjuntos C y D(tomados de U) son iguales, y esto se escribe C=D , cuando

$$C \subseteq D \text{ y } D \subseteq C$$

  - El orden o la repetición no son significativos para un conjunto en general. Así, tenemos, por ejemplo
  - {1,2,3}={3,1,2}={2,2,1,3}={1,2,1,3,1}

# Ejemplo

Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ (donde $x$, $y$ son letras minúsculas del alfabeto y no representan nada más, al igual que 3, 5 o $\{1, 2\}$). Entonces, $|\mathcal{U}| = 11$.

**a)** Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $|A| = 4$ y tenemos

**i)** $A \subseteq \mathcal{U}$; **ii)** $A \subset \mathcal{U}$; **iii)** $A \in \mathcal{U}$;
**iv)** $\{A\} \subseteq \mathcal{U}$; **v)** $\{A\} \subset \mathcal{U}$; pero **vi)** $\{A\} \notin \mathcal{U}$.

**b)** Ahora sea $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Entonces $|B| = 5$, *no* 8. Y ahora vemos que

**i)** $A \in B$; **ii)** $\{A\} \subseteq B$; y, **iii)** $\{A\} \subset B$.

Pero

**iv)** $\{A\} \notin B$;
**v)** $A \nsubseteq B$ (es decir, $A$ no es subconjunto de $B$); y
**vi)** $A \not\subset B$ (es decir, $A$ no es subconjunto propio de $B$).

# TEOREMA

Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$.

a) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

b) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.

c) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

d) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

# Ejemplo

Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces se cumplen las siguientes relaciones de contenido de subconjuntos.

a) $A \subseteq C$
b) $A \subset C$
c) $B \subset C$
d) $A \subseteq A$
e) $B \not\subseteq A$
f) $A \not\subset A$ (es decir, $A$ no es un subconjunto propio de $A$)

- A, B son sólo dos de los subconjuntos de C.
- Nos interesa determinar cuántos subconjuntos tiene C en total. Antes de responder esto, necesitamos presentar el conjunto sin elementos.

# VACÍO

- DEFINICIÓN
- El conjunto vacío, o nulo, es el ( único) conjunto que no contiene elementos.
- Se denota como $\emptyset$ o $\{\ \}$

Observemos que $|\emptyset| = 0$, pero $\{0\} \neq \emptyset$. Así mismo, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, ya que $\{\emptyset\}$ es un conjunto con un elemento, a saber, el conjunto vacío.

# VACÍO

- TEOREMA
  - Para cualquier universo U sea

$A \subseteq \mathcal{U}$. Entonces $\emptyset \subseteq A$ y si $A \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \subset A$.

# POTENCIA

- Si A es un conjunto del universo U, el conjunto potencia, que se denota P(A), es la colección (o conjunto) de todos los subconjuntos de A
- Ejemplo
- Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto de U
- P(C) = $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\},$
  $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, C\}$

# POTENCIA

$\#A = |A| = n$

$\#P(A) = |P(A)| = 2^n$

Ejercicio

Sea $A=\{1,2,5\}$

Cuantos elementos tendrá P(A).

Realice P(A)

# EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

   a) $\{1,2,3\}$ b) $\{3,2,1,3\}$ c) $\{3,1,2,3\}$ d) $\{1,2,2,3\}$

2. Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

   a) $1 \in A$ b) $\{1\} \in A$ c) $\{1\} \subseteq A$ d) $\{\{1\}\} \subseteq A$

   e) $\{2\} \in A$ f) $\{2\} \subseteq A$ g) $\{\{2\}\} \subseteq A$ h) $\{\{2\}\} \subset A$

3. Para $A = \{1,2,\{2\}\}$, ¿cuáles de las ocho proposiciones del ejercicio 2 son verdaderas?

4. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

   a) $\emptyset \in \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$ c) $\emptyset \subseteq \emptyset$

   d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ f) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

5. Determine todos los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

   a) $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ b) $\{n + (1/n) \mid n \in \{1,2,3,5,7\}\}$

   c) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0,1,2,3,4\}\}$

   d) $\{1/(n^2 + n) \mid n$ es un entero positivo impar y $n \leq 11\}$

# EJERCICIOS

**6.** Consideremos los siguientes seis subconjuntos de $\mathbf{Z}$:

$$A = \{2m+1 | m \in \mathbf{Z}\}; \quad B = \{2n+3 | n \in \mathbf{Z}\}; \quad C = \{2p-3 | p \in \mathbf{Z}\};$$

$$D = \{3r+1 | r \in \mathbf{Z}\}; \quad E = \{3s+2 | s \in \mathbf{Z}\}; \quad F = \{3t-2 | t \in \mathbf{Z}\}.$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas?

**a)** $A = B$ **b)** $A = C$ **c)** $B = C$
**d)** $D = E$ **e)** $D = F$ **f)** $E = F$

**7.** Sean $A$, $B$ conjuntos de un universo $\mathcal{U}$.

**a)** Escriba una proposición cuantificada para expresar la relación de contenido propia $A \subset B$.

**b)** Niegue el resultado de la parte (a) para determinar cuándo $A \not\subset B$.

**8.** Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, determine el número de

**a)** subconjuntos de $A$.
**b)** subconjuntos no vacíos de $A$.
**c)** subconjuntos propios de $A$.
**d)** subconjuntos propios no vacíos de $A$.
**e)** subconjuntos de $A$ que contienen tres elementos.
**f)** subconjuntos de $A$ que contienen 1, 2.
**g)** subconjuntos de $A$ que contienen cinco elementos, incluyendo 1, 2.
**h)** subconjuntos propios de $A$ que contienen 1, 2.
**i)** subconjuntos de $A$ con un número par de elementos.
**j)** subconjuntos de $A$ con un número impar de elementos.
**k)** subconjuntos de $A$ con un número impar de elementos y que incluyen el elemento 3.

# EJERCICIOS

**9.** **a)** Si un conjunto $A$ tiene 63 subconjuntos propios, ¿cuánto vale $|A|$?
**b)** Si un conjunto $B$ tiene 64 subconjuntos de cardinal impar, ¿cuánto vale $|B|$?
**c)** Generalice el resultado de la parte (b).

**10.** ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son no vacíos?

**a)** $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 2x + 7 = 3\}$
**b)** $\{x \in \mathbf{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$
**c)** $\{x \mid x \in \mathbf{Q}, x^2 + 4 = 6\}$
**d)** $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$
**e)** $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 5 = 4\}$
**f)** $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$
**g)** $\{x \mid x \in \mathbf{C}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$

**11.** Cuando está a punto de salir de un restaurante, un hombre nota que tiene una moneda de 1 centavo, otra de 5, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos de dólar. ¿De cuántas formas puede dejar una (al menos una) de sus monedas para la propina si **a)** no hay restricciones? **b)** quiere quedarse con algo de cambio? **c)** quiere dejar al menos 10 centavos?