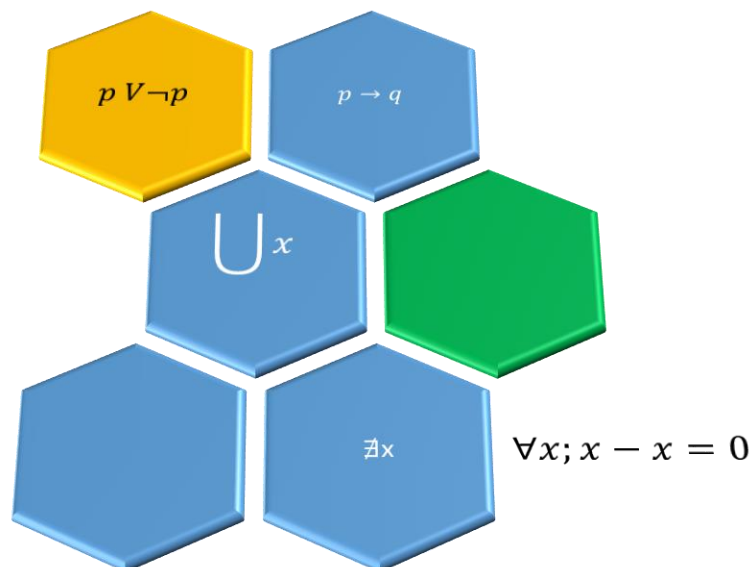
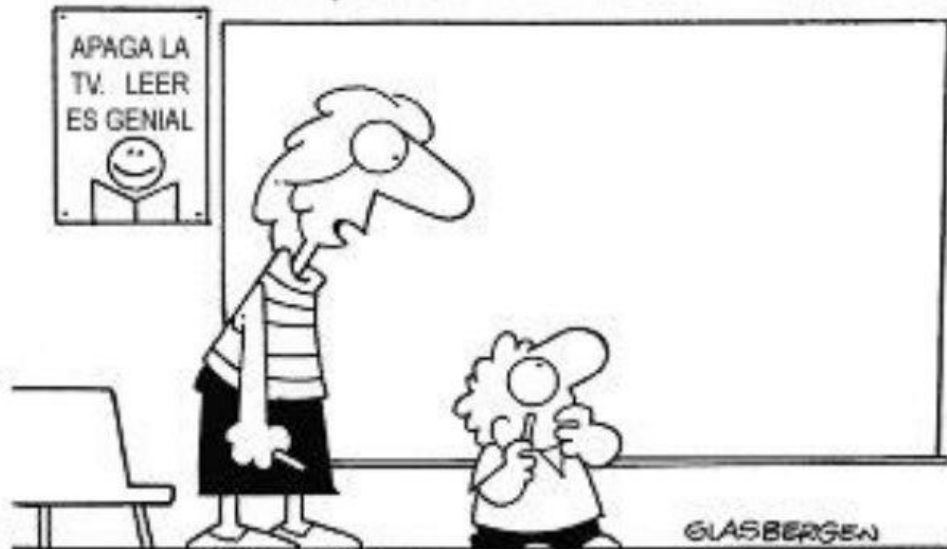


APUNTES DE LOGICA

UNIVERSIDAD DEL TRABAJO DEL URUGUAY



Aquí no hay botones para hacer click.
Esto es una pizarra.



Proposiciones

Los términos «lógico» y «matemática» asustan a muchos, ante la sola idea de pensar lógicamente. Pero el obstáculo es parcialmente imaginado: todos empleamos cada día habilidades lógico – matemáticas básicas para toda clase de tareas como: comprar; resolver problemas; clasificar facturas y cuentas y hasta resolver crucigramas. Lo que sucede es que no nos damos cuenta que las utilizamos. El pensamiento lógico es la base del razonamiento deductivo y es vital para el desarrollo del argumento racional de cada persona.

Los seres humanos todos los días obtenemos conclusiones. El padre de familia concluye que su hijo ha estudiado, cuando ha obtenido una buena prueba; el profesor concluye que el curso no ha asimilado el inter–aprendizaje, cuando un alto porcentaje del alumnado ha rendido una evaluación con bajo puntaje.

El proceso que nos permite concluir se llama razonamiento. Por consiguiente se puede decir que la lógica es la ciencia del razonamiento y se deduce que es la disciplina dedicada a identificar las formas de razonamiento, con el objeto de crear técnicas para determinar si un argumento es válido o no.

Las conclusiones se obtienen a partir de frases llamadas premisas o hipótesis.

El interés de la lógica es la determinación o validez de un razonamiento, es decir, su forma y no presta atención a su contenido.

El punto de partida para el estudio de la lógica lo constituyen las oraciones que son falsas (F) o verdaderas (V) denominadas proposiciones.

Def: De lo mencionado se puede decir que una proposición es una frase que puede ser verdadera o falsa, pero no puede tener ambos valores de verdad al mismo tiempo.

En este texto a las proposiciones verdaderas (V) se las representará con el número 1 y las falsas (F) con el número 0. Letras como p, q, r, s, t, etc., minúsculas pueden usarse para representar proposiciones.

Ejemplo 1: Exprese simbólicamente las siguientes frases e indique su valor de verdad:

a) La Matemática es una ciencia.

p: La Matemática es una ciencia.

La proposición p es verdadera.

b) Uruguay es un país ganadero.

q: Uruguay es un país ganadero.

La proposición q es verdadera.

c) $3^{\circ} \neq 1$

s: $3^\circ \neq 1$

La proposición s es falsa.

d) Mariana viaja en tren.

p: Mariana viaja en tren.

No es posible determinar su valor de verdad.

Ejemplo 2: Indique si las siguientes frases son proposiciones o no:

- a) Con luz podemos ver. SI
- b) Los gatos vuelan. SI
- c) Mañana lloverá. NO
- d) Montevideo no es la capital de Uruguay. SI
- e) $y = 4$ y $2 = 6$ SI
- f) ¿Qué hora es? NO
- g) Ojalá llueva. NO
- h) El puma es un felino. SI
- i) ¡Camina! NO
- j) Miguel de Cervantes escribió el Quijote. SI
- k) $0 = 2$; $0 \leq 3$ SI
- l) Me parece que la pintura blanca es la mejor para esa pared NO
- m) Las ballenas algún día se extinguirán. NO
- n) $(2 + 4) > -3$ SI
- o) Si $4 > 3$ entonces $6 \leq -3$ SI
- p) Es más fácil el estudio de la música que el estudio de las matemáticas. NO

Como guía se puede decir que las frases que expresan exclamaciones, suposiciones, sugerencias y deseos no son proposiciones sino simples enunciados.

Las proposiciones pueden ser enlazadas utilizando elementos gramaticales para formar proposiciones más complejas. Ejemplos de tal tipo son los literales d), e), k), o) y q) del ejemplo anterior.

Las proposiciones que no hacen uso de los operadores lógicos se les llama simples o atómicas y a las que si hacen uso de ellos tienen el nombre de compuestas o moleculares.

Proposiciones Abiertas y Cerradas

Existen algunas afirmaciones de las cuales no podemos decir inicialmente si son falsas o verdaderas por intervenir en ellas una variable. Una proposición abierta es una expresión que contiene una variable y que al ser sustituida dicha variable por un valor determinado hace que la expresión se convierta en una proposición cuyo valor de verdad puede determinarse.

Proposiciones cerradas son todas aquellas que no son abiertas. Es decir, son todas aquellas en donde se puede determinar en forma inmediata su valor de verdad.

Las proposiciones del ejemplo siguiente son abiertas.

Ejemplo 1:

- a) x es un número no primo.
- b) Este país pertenece a la Unión Europea.
- c) $x + 2 = 4$
- d) $x > 6$

Si en el literal a) se reemplaza x por el número 6, se tendrá una proposición verdadera.¹

En el literal b) la palabra Estados Unidos de Norte América hace que la proposición sea falsa.

¿Qué número hace que el literal c) sea una proposición cerrada?

¿Cuatro hace que el literal d) sea una proposición cerrada?

Ejemplo 2: Determine si las siguientes proposiciones son abiertas o cerradas y en las que sea posible determine su valor de verdad.

- a) $\sqrt{25} = \pm 5$

Es cerrada y verdadera.

- b) Él es Alcalde del zonal BH.

Es abierta.

- c) El cerro pan de azúcar tiene 389 metros.

Es cerrada y verdadera.

- d) $x = x$ si x es ≥ 0

Es abierta y válida para todos los valores reales.

- e) $x < 7$

Es abierta y válida para determinados valores de x

Ejemplo 3: ¿Cuál de los siguientes enunciados es una proposición?

- a) La pera es una fruta.
- b) Mañana jugará la selección.
- c) La edad del universo es de unos quince mil millones de años.
- d) 73 es un número primo.
- e) Disparen al ladrón!

Solución

- a) Si.
- b) No, porque no se sabe si mañana llegará.
- c) No, dado que no se precisa la edad del universo.
- d) Si.
- e) No, es una expresión en donde no es posible determinar su valor de verdad.

Conectivas Lógicas

Las tablas de los principales operadores lógicos que se van a analizar en esta sección son:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Negación

Este operador lógico transforma el valor de verdad de una proposición. Se lo representa por el símbolo de “~” o “¬”. En estos apuntes se usará el símbolo “¬”.

¬ p se puede traducir como:

- Es falso que p x
- No ocurre que p
- No p

Cada forma de traducción es equivalente, o sea significa lo mismo.

Si se toma como 1 para el valor de verdadero y 0 para el valor de falso, se puede construir la siguiente tabla para este operador lógico.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Y sirve, como se verá más adelante, para determinar, en compañía de otros operadores lógicos, la validez de algunos tipos de razonamientos.

Ejemplo 1:

Expresa el negativo de las siguientes proposiciones y determine su valor de verdad donde sea posible.

a) q: “2 es un número primo”

¬q: “2 no es un número primo”

b) ¬s: $\sqrt{144} = 12 \therefore s: \sqrt{144} \neq 12$ ¬s es verdadera, s es falsa.

Negación de Proposiciones Especiales

Proposición	Negación
<i>Todos</i>	<i>Algunos... no</i>
<i>Algunos</i>	<i>Ningún</i>
<i>Algunos...no</i>	<i>Todos</i>
<i>Ningún</i>	<i>Algunos</i>

Ejemplo 2:

Expresa la negación de las proposiciones siguientes.

- a) p: todos los estudiantes de Matemática estudian Lógica.
 $\neg p$: algunos estudiantes de Matemática no estudian Lógica.
- b) q: algún número es compuesto.
 $\neg q$: ningún número es compuesto.
- c) t: ningún hombre es inmortal.
 $\neg t$: algunos hombres son inmortales.
- d) s: algunos inventores son ingenieros.
 $\neg s$: ningún inventor es ingeniero.

Conjunción

Este operador une dos proposiciones y se lo representa como: " $\wedge$ ". En algunos textos también se utiliza el símbolo: "&"

$p \wedge q$ se traduce como:

- p y q
- p pero q
- p sin embargo q

La tabla de verdad es:

Operador de Conjunción

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

De la tabla se deduce que $p \wedge q$ será verdadera si y solo si las dos proposiciones que la conforman son verdaderas.

Ejemplo 1:

Expresa en lenguaje proposicional las siguientes frases y determine su valor de verdad donde sea posible.

a) El *Tom Apóstol* es un libro de Matemáticas y la vaca es un animal herbívoro.

p : El *Tom Apóstol* es un libro de Matemáticas. (1)

q : La vaca es un animal herbívoro. (1)

Operador lógico presente: y ($\wedge$)

Simbólicamente: $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1

Luego, la frase es verdadera.

d) $\sqrt{81}$ no es menor que 10 y 8 es un número primo.

p : $\sqrt{81}$ es menor que 10 (1)

q : 8 es un número primo. (0)

$\neg p$: $\sqrt{81}$ no es menor que 10 (0)

El enunciado se expresa como: $\{(\neg p) \wedge q\}$

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
1	0	0	0

Luego, el enunciado es falso.

Disyunción

Dentro del lenguaje cotidiano, este operador se puede interpretar de dos maneras. La primera, la cual es la más usada, es la disyunción inclusiva que se representa por: “V”

$p \vee q$ se lee:

- p o q
- p o q y ambos inclusive

La tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

De la anterior se deduce que para que la disyunción inclusiva sea verdadera, es suficiente que una de las dos proposiciones que la conforman sea verdadera. Si las dos proposiciones son falsas la disyunción será falsa.

Ejemplo 1:

Expresa en lenguaje proposicional las siguientes frases y determine su valor de verdad donde sea posible.

a) “leo o escucho”

p : leo

q : escucho

Luego: $p \vee q$

Obsérvese que en el problema planteado se puede estar haciendo las dos cosas al mismo tiempo: es decir, mientras se lee, se puede escuchar o mientras se escucha, se puede leer.

b) $3 \neq 2$ o $1 + 2 > 3$

p : $3 = 2$

q : $1 + 2 > 3$

Luego: $\neg p \vee q$

El lector debe apreciar que la proposición p se la ha extraído en forma positiva de la frase y que al momento de expresarla simbólicamente se la ha negado.

El segundo tipo es la disyunción exclusiva y se la representa de la siguiente forma: “ $\vee$ ”

$P \vee q$ se traduce como: p o q pero no ambos.

Algunos autores llaman también a este operador bidisyunción o disyunción fuerte.

La tabla de verdad para este operador es:

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Del cuadro se observa que la disyunción exclusiva es verdadera si y sólo si las proposiciones simples tienen valores de verdad diferentes, si tienen los mismos valores, será falsa.

Ejemplo 2: Expresa en lenguaje proposicional las siguientes frases.

a) O estoy en clase o estoy en el primer recreo.

p: estoy en clase.

q: estoy en el primer recreo.

Se expresa como: $p \vee q$

b) O sabes ó no sabes.

s: Usted sabe

s: Usted no sabe

Luego: $s \vee \neg s$

Apréciase que en los literales a) y b) no se puede efectuar ambos al mismo tiempo.

Ejemplo 3: Traduzca las siguientes fórmulas proposicionales en base a las siguientes proposiciones simples: a: practico ejercicios todos los días; b: tengo buena salud.

a) $a \wedge b$

Practico ejercicios todos los días y tengo buena salud.

b) $\neg a$

No es cierto que practique ejercicios todos los días.

b) $\neg(a \vee b)$

No es cierto que: practico ejercicios todos los días o tengo buena salud.

d) $\neg a \vee b$ No es cierto que practique ejercicios todos los días o tengo buena salud.

e) $\neg(\neg b)$ No es cierto que no tenga buena salud.

Condicional

Este operador es muy empleado y de gran importancia en la lógica matemática.

Se lo representa como “ $\rightarrow$ ”

$p \rightarrow q$ significa:

- sí p, entonces q
- p es condición suficiente para q
- q es condición necesaria para p

El operador condicional también conocido con el nombre de “enunciación hipotética” se construye a partir de una proposición llamada antecedente o hipótesis y de otra llamada consecuente o tesis. El condicional indica que el consecuente se deduce del antecedente y comunica una decisión y, sirve para efectuar una implicación.

La tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Un aspecto importante en la lógica lo constituyen aquellas proposiciones compuestas en que su tabla de verdad resultante en cada una de sus diversas proposiciones siempre se obtiene el valor de verdadero (1) sin importar cuál sea el valor de las proposiciones atómicas que la conforman.

La proposición resultante cuya tabla de verdad siempre es verdadera se la conoce con el nombre de *forma proposicional tautológica*.

La proposición resultante cuya tabla de verdad siempre es falsa, se la conoce con el nombre de *contradicción*. Cuando la última columna arroja valores de verdad y falso se dice que existe una *contingencia*.

La Matemática nos permite decir que un razonamiento será válido cuando la forma proposicional que determina su lógica es una forma proposicional tautológica.

Más adelante, cuando se analice la validez o no de un razonamiento con las reglas de inferencia, se apreciará que el operador principal es el condicional.

Ejemplo 1: Expresar en lenguaje proposicional: Si $2^3 = 8$, entonces $4^{-3} = 1/64$

Solución

$$p: 2^3 = 8$$

$$q: 4^{-3} = 1/64$$

$$\text{Luego: } p \rightarrow q$$

Ejemplo 2: Determine el valor de verdad de las siguientes expresiones:

a) Si $9 - 2 = 11$ o $16+4 = 20$, entonces $4 + 3 \neq 3$

Solución

$$p: 9 - 2 = 11$$

$$q: 16+4 = 20$$

$$r: 4 + 3 = 3$$

Simbólicamente: $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ (**Hacer su tabla de verdad!**)

Bicondicional

El bicondicional se puede “deducir” a partir de $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ llegando mediante esta definición al $p \leftrightarrow q$. El símbolo “ $\leftrightarrow$ ” se utiliza como un operador lógico para formar nuevas formas proposicionales. El signo aparece como dos signos condicionales que van en sentidos opuestos. El operador bicondicional, se suele representar como: “ $\leftrightarrow$ ”.

La proposición resultante $p \leftrightarrow q$ puede leerse de las siguientes formas:

- p sí y solo sí q
- p es condición necesaria y suficiente para q
- p es equivalente con q
- p siempre y cuando q

La tabla de verdad para este operador lógico es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Si dos proposiciones son lógicamente equivalentes, el valor de verdad de una, es siempre el mismo valor de verdad de la otra, y su bicondicional correspondiente será siempre verdadero, se trata de una tautología. Por esta razón, proposiciones lógicamente equivalentes se llaman también proposiciones tautológicamente equivalentes y el bicondicional tautológico se le denomina **equivalencia lógica**, cuestión a la que volveremos más adelante.

Ejemplo 1:

Expresa simbólicamente: “La proposición es simple si y solo si la proposición no se puede descomponer en proposiciones simples”.

Solución

p: “la proposición es simple”

q: “la proposición se puede descomponer en proposiciones simples”

Se expresa: $p \leftrightarrow \neg q$

Ejemplo 2: Muéstrese la tabla de verdad de la fórmula proposicional:

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \wedge r$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0

Obsérvese que los valores de las columnas (5) y (6) no son iguales, luego, la “equivalencia” dada es falsa.

Si se observa los valores de la columna (7), se podrá apreciar que la proposición dada es una **contingencia**.

Ejemplo 2:

La proposición compuesta $p \vee \neg p$ es siempre verdadera, sin importar el valor de verdad de p .

- ¡Se sugiere al alumno hacer la tabla de verdad y comprobarlo!

Ejemplo 3:

Demostrar que: $(p \wedge q) \vee [p \rightarrow \neg q]$ es una tautología. $\therefore$ Ídem para $(p \vee q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ (*)

Tautologías

1. Definición:

Muchas proposiciones en lógica simbólica son siempre verdaderas. Por ejemplo (como vimos anteriormente), la proposición compuesta:

$$p \vee \neg p$$

es siempre verdadera, sin importar el valor de verdad de p . Las proposiciones que son siempre verdaderas se llaman tautologías.

TAUTOLOGIA: Una **tautología** es una proposición que es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad

Para probar que una proposición dada es una tautología se construye su tabla de verdad y se verifica que la última columna (que representa a la proposición dada) consta solamente de valores **V** o **F**. Si aparece aunque sea un valor **F** no se trata de una tautología. Si todos los valores de la última columna son **F**, la proposición dada se llama una **contradicción**.

Ejemplo 1: Demostrar que $(p \wedge q) \vee [p \rightarrow \neg q]$ es una tautología.

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$(p \wedge q) \vee [p \rightarrow \neg q]$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1

Podemos ver que la proposición es una tautología, ya que es verdadera en todos los casos de su tabla de verdad.

Ejemplo 2: Contestar lo que sigue: ¿es $(p \vee q) \rightarrow [\neg q \rightarrow p]$ una tautología? ¡Justifique su respuesta!

Implicación y Equivalencia

Si una condicional es tautológica, como en el Ejemplo 3 (*), entonces se llama **implicación** y se simboliza por ($\Rightarrow$). Esto es, el ejemplo 3 (*) se puede escribir como: $(p \vee q) \Rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

El símbolo de implicación $p \Rightarrow q$ se pronuncia “p implica q”.

Una proposición bicondicional, $p \leftrightarrow q$ que es también tautológica se llama **equivalencia lógica** y se simboliza por ($\Leftrightarrow$) y la anotamos como $p \Leftrightarrow q$, se lee “p es lógicamente equivalente a q”.

Ejemplo 1: Demostrar que: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

Se pide al alumno que haga la tabla de verdad; ¡finalmente podrá comprobar que se trata de una equivalencia lógica!

Nótese la diferencia entre los símbolos “ $\rightarrow$ ” y “ $\Rightarrow$ ”, lo mismo que entre “ $\leftrightarrow$ ” y “ $\Leftrightarrow$ ”. La *condicional* “ $\rightarrow$ ” y la *bicondicional* “ $\leftrightarrow$ ” se usan como conectivos lógicos y el valor de verdad para estos casos puede ser verdadero o falso. Si, como consecuencia de las proposiciones que se conectan, las tablas de verdad proporcionan solamente valores verdaderos, entonces se emplean los símbolos “ $\Rightarrow$ ” y “ $\Leftrightarrow$ ” en lugar de “ $\rightarrow$ ” y “ $\leftrightarrow$ ” y se les llama **implicación** “ $\Rightarrow$ ” o **equivalencia lógica** “ $\Leftrightarrow$ ”. respectivamente.

En lo que resta de estos apuntes consideraremos ocho tautologías o leyes de la lógica; el alumno deberá familiarizarse con ellas de manera que pueda referirse a cada una de estas por su nombre. Estas leyes formaran la base sobre la cual se pueden fundar ciertos métodos de demostración que son importantes en **lógica** y **matemáticas**. Primeramente, enumeraremos las ocho tautologías y luego se considerará cada una de ellas.

TAUTOLOGIA	FORMA SIMBOLICA
1. Tautología trivial	$p \Leftrightarrow p$
2. Ley de la doble negación	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
3. Ley del medio excluido	$p \vee (\neg p)$
4. Razonamiento directo	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
5. Razonamiento indirecto	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
6. Ley de transitividad	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$
7. Ley de la contrareciproca	$[(p \rightarrow q)] \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
8. Silogismo disyuntivo	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$

Demostraciones (de algunas de ellas...)1. *Tautología trivial* $p \Leftrightarrow p$

La tautología trivial establece que cualquier proposición es equivalente a sí misma. La demostración se da por medio de una tabla de verdad.

$.p$	$p \Leftrightarrow p$
1	1
0	1

Puesto que la última columna contiene solamente valores 1 (“unos”: valores verdaderos), el resultado queda probado.

2. *Ley de la doble negación* $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

Probaremos ahora la tautología para p y $\neg(\neg p)$ [el estudiante deberá probar la doble negación antes]

$.p$	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
1	0	1	1
0	1	0	1

3. *Ley del medio excluido* $p \vee (\neg p)$

Veamos en este caso:

$.p$	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
1	0	1
0	1	1

¡Las restantes demostraciones quedaran a cargo del estudiante!

Traducción de Razonamientos

La lógica matemática establece que un razonamiento tiene la estructura:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow C$ en donde P_1 , P_2 , P_3 y P_n se denominan premisas y C conclusión.

Vale indicar que, un buen número de teoremas de Matemática tienen la estructura dada anteriormente.

Las premisas P y la conclusión C son aquellas frases que pueden estar formadas por una o varias proposiciones.

Las premisas y la conclusión se encuentran separadas por el operador condicional ($\rightarrow$)

Ejemplo 1: Determine la validez del siguiente razonamiento:

“Si Juana no grita, sus hijos no le obedecen. Si los hijos de Juana no le obedecen, entonces, Juana se enoja. Juana no está gritando. Por lo tanto Juana está enojada”.

Solución

p : Juana grita; q : los hijos de Juana le obedecen; r : Juana está enojada.

P_1 : $\neg p \rightarrow \neg q$

P_2 : $\neg q \rightarrow r$

P_3 : $\neg p$

C : r

El razonamiento tiene la forma: $\{(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow r) \wedge (\neg p)\} \rightarrow r$

¡Hacer tabla de verdad y deducir la correctitud del razonamiento de acuerdo al resultado!

Ejemplo 2: Tradúzcase la siguiente forma proposicional:

$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$, donde p , q y r significan:

Eva come manzanas; Adán come manzanas; Eva no está tranquila; respectivamente.

Solución:

La traducción es:

“Si Eva come manzanas, Adán también; pero si Eva no come manzanas entonces no está tranquila”.

Algebra de proposiciones

Disyunción:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

Propiedad Conmutativa

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

Propiedad Asociativa

$$p \vee 0 \equiv p$$

Ley de la Identidad

$p \vee 1 \equiv 1$	Ley de la Absorción
$p \vee p \equiv p$	Ley de la Idempotencia
$p \vee \neg p \equiv 1$	Ley del Tercero Excluido

Conjunción:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Propiedad Conmutativa
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	Propiedad Asociativa
$p \wedge 1 \equiv p$	Ley de la Identidad
$p \wedge 0 \equiv 0$	Ley de la Absorción
$p \wedge p \equiv p$	Ley de la Idempotencia
$p \wedge \neg p \equiv 0$	Ley de la Contradicción
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Propiedad Distributiva
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Propiedad Distributiva
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Ley de la Absorción
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Ley de la Absorción

$$\neg 0 \equiv 1$$

$$\neg 1 \equiv 0$$

$$\neg \neg p \equiv p \quad \text{Ley de la Doble Negación}$$

$$p \equiv \neg \neg p \quad \text{Ley de la Doble Negación}$$

$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad \text{Ley de Morgan}$$

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \text{Ley de Morgan}$$

Otras Leyes:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{Ley de la Contraposición}$$

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \quad \text{Ley del Condicional}$$

$$(p \oplus q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q) \quad \text{Disyunción Exclusiva}$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \text{Ley del Bicondicional}$$

Estas leyes son formas proposicionales tautológicas, es decir, para cualquier valor que tomen p, q y r, la forma proposicional resultante siempre va ser verdadera.

Variantes de la Condicional: *Inversa, Recíproca y Contrarrecíproca*

En algunos razonamientos se hace necesario conocer la inversa, recíproca y contrarrecíproca de estos, términos que se los define de la siguiente manera:

Original: $p \rightarrow q$

Inversa: $\neg p \rightarrow \neg q$

Recíproca: $q \rightarrow p$

Contrarrecíproca: $\neg q \rightarrow \neg p$

Obsérvese que la definición de contrarrecíproca es la misma que la Ley de Contraposición de las Leyes de Equivalencia.

Ejemplo 1:

Determine la inversa, recíproca y contrarrecíproca de $p \rightarrow q$; siendo: p: este animal es un ave; q: este animal tiene alas.

Solución:

Original: $p \rightarrow q$ Si este animal es un ave entonces tiene alas

Inversa: $\neg p \rightarrow \neg q$ Si este animal no es un ave, no tiene alas

Recíproca: $q \rightarrow p$ Si este animal tiene alas entonces es un ave.

Contrarrecíproca: $\neg q \rightarrow \neg p$ Si este animal no tiene alas entonces no es ave.

Resumen

Las leyes del álgebra de Proposiciones son muy útiles para demostrar la validez de razonamientos, como se verá más adelante.

Algunas de ellas se deducen a partir de la definición de las tablas de los operadores lógicos presentes en su fórmula.

Las *Leyes de Morgan* expresan:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Otra ley muy utilizada es la Ley de la Absorción que se expresa como:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

Se deberá observar que en cada caso los operadores lógicos son diferentes. Si se aplicara la propiedad distributiva a una de ellas, se llega a la otra fórmula.

Las principales equivalencias **tautológicas** son:

1. Ley de la Contraposición $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$
2. Ley del Condicional $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
3. Disyunción Exclusiva $(p \vee\vee q) \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
4. Ley del Bicondicional $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
5. Tautología trivial $p \Leftrightarrow p$
6. Ley de la doble negación $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
7. Ley del medio excluido $p \vee (\neg p)$
8. Razonamiento directo $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
9. Razonamiento indirecto $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$
10. Ley de transitividad $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$
11. Ley de la contrarrecíproca $[(p \rightarrow q)] \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
12. Silogismo disyuntivo $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$

¡Las equivalencias tautológicas actúan en ambos sentidos!!

Falacias Lógicas

Los términos *valido* y *no valido* se refieren a la forma del argumento no a la verdad o falsedad de las proposiciones. Un argumento válido afirma que la conclusión se deduce de la o las hipótesis de acuerdo con una o más tautologías (como se vio anteriormente).

Podemos tener la seguridad de que, si aquello con lo que se empieza es verdadero (o se supone verdadero), entonces, -sabiendo cómo aplicar las tautologías-, se obtendrán conclusiones correctas. Esto es, es imposible partir de premisas verdaderas y obtener una conclusión falsa utilizando las reglas apropiadas de la lógica. Lo importante a recordar es que, la veracidad o falsedad de las premisas y la conclusión no determinan la **validez** de un argumento.

¡A veces se presentan *argumentos no validos*! A continuación, consideraremos algunos argumentos no validos comunes, o sea ***falacias lógicas***.

1. Falacia de afirmación del consecuente

Veamos un ejemplo:

Analizar la validez del siguiente argumento.

Si una persona lee el periódico, entonces está bien informada.

Esta persona está bien informada.

Por lo tanto, esta persona lee el diario

Solución: Este argumento tiene la forma siguiente:

$p \rightarrow q$

q

$\therefore p$

Consideremos la tabla de verdad asociada, se puede analizar la validez del argumento:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Vemos que el resultado no siempre es verdadero; así que el argumento no es válido. El valor presente del tercer reglón es falso, así que puede demostrarse que el argumento es falso en el caso de que **p** sea falsa y **q** verdadera. En términos de este ejemplo, podría ser que una persona nunca leyera un determinado periódico y eligiera otro diario distinto para informarse (**q** verdadera).

2. Falacia de negación del antecedente

Consideremos el argumento siguiente:

Si una persona lee el periódico, entonces está bien informada.

Esta persona no lee el periódico

Por lo tanto, esta persona no está bien informada

Esta línea de razonamiento se la conoce como falacia de negación del antecedente.

La tabla de verdad de $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$ muestra que la falacia de negación del antecedente no es válida. (La tabla de verdad se deja como ejercicio).

Ejemplo: Analizar la validez del siguiente argumento:

Si una persona va a la universidad, llegara a ganar mucho dinero.

Tu no vas a la universidad

Por lo tanto, tu no llegarás a ganar mucho dinero.

Este argumento tiene la siguiente forma; $p \rightarrow q$

$\neg p$

$\therefore \neg q$

Vemos que tal razonamiento corresponde a la falacia de negación del antecedente.

3. Esquema de cadena falso

En ciertas regiones se tiene la creencia de que las tormentas ocasionan que la leche se agrie o corte. Tal creencia es un ejemplo de la falacia que llamamos esquema de cadena falso. Se puede ilustrar como sigue:

El clima cálido y húmedo favorece las tormentas.

El clima cálido y húmedo favorece el crecimiento de bacterias, lo que ocasiona que la leche se agrie o corte

Por lo tanto las tormentas ocasionan que la leche se corte.

El esquema de cadena falso se muestra mediante:

$$p \rightarrow q$$

$$p \rightarrow r$$

$$\therefore q \rightarrow r$$

NATURALEZA DE UNA DEMOSTRACION

En matemáticas a menudo nos ocupamos de la demostración lógica de ciertas afirmaciones. Cualquier sistema lógico debe empezar con algunos términos no definidos (o no definibles), definiciones y postulados o axiomas. A partir de ello, se puede hacer otras afirmaciones. Estas, llamadas teoremas, deben probarse empleando las reglas de la lógica.

Los pasos que vamos a emplear para probar argumentos lógicos son los que veremos a continuación:

- 1. Traducir las expresiones a la forma simbólica.**
- 2. Aplicar una o más de las tautologías vista anteriormente.**
- 3. Luego de simplificar el argumento por medio de una o más de las tautologías fundamentales, se traduce el resultado de nuevo al lenguaje común (lenguaje natural).**

Ejemplo de argumentos lógicos:

Ejemplo 1:

Obtener una conclusión valida empleando todas las proposiciones.

1. Si eres bien parecido, entonces te casas con una millonaria
2. Tú no te casas con una millonaria.

Solución: El esquema o modelo se puede representar como sigue:

$g \rightarrow m$	donde g: Tú eres bien parecido.
$\neg m$	m: Te casas con una millonaria.

$\therefore \neg g$	Razonamiento indirecto

Ejemplo 2:

Obtener una conclusión valida empleando todas las proposiciones.

1. Si vamos a un día de campo, entonces preparamos la comida.
2. Si preparamos la comida, entonces compramos pan.
3. Si compramos pan, entonces vamos a la tienda.

Solución:

1. $p \rightarrow l$ donde p: Vamos a un día de campo.
2. $l \rightarrow b$ l: Preparamos la comida.
3. $b \rightarrow s$ b: Compramos pan
 s: Vamos a la tienda.

¿Qué tautología utilizaría Ud. en este caso?

Respuesta: ¡Ley de la Transitividad!, es decir, concluiríamos $\therefore p \rightarrow s$

Esto se puede expresar también como una cadena: $p \rightarrow l \rightarrow b \rightarrow s \therefore p \rightarrow s$

Ejemplo 3:

Obtener una conclusión valida empleando todas las proposiciones.

1. Si recibo un cheque por 500000 pesos, entonces iremos de vacaciones.
2. Si el auto se descompone, entonces no iremos de vacaciones.
3. El auto se descompone.

Solución:

Paso 1: Traducir

1. $c \rightarrow v$ Donde c: Recibo un cheque por 500000.
2. $b \rightarrow \neg v$ v: Iremos de vacaciones.
3. b b: El auto se descompone.

Paso 2: Simplificar

Si observamos la premisa dos puede sustituirse por su *Contrareciproca* obteniéndose $v \rightarrow \neg b$, a esta premisa la llamaremos 2' y reescribimos las dos primeras premisas con la modificación de 2'.

1. $c \rightarrow v$
- 2'. $v \rightarrow \neg b$

Con 1 y 2' estamos en condiciones de aplicar Transitividad obteniendo $c \rightarrow \neg b$

 $\therefore c \rightarrow \neg b$ *Transitividad* .

3. b

 $\therefore \neg c$ *Razonamiento Indirecto*

Paso 3: Traducir

Conclusión: *No recibo un cheque por 500000 pesos.*

Es importante destacar que, se aplicaron los tres pasos como se vio anteriormente poniendo especial cuidado en que, cada premisa que es sustituida por su equivalente la distinguimos de la original por una apostrofe (').

Ejemplo 4:

Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

1. Los niños son ilógicos.
2. Nadie es despreciado cuando puede domar un cocodrilo.
3. Las personas ilógicas son despreciables.

Nótese que, en este caso el pasaje a simbólico no es tan simple, lo que deberemos hacer es reescribir las premisas anteriores de forma que sea más sencillo la traducción. (Paso 1).

Entonces...

P1: Si Ud. es un niño entonces Ud. es ilógico.

P2: Si Ud. puede domar un cocodrilo entonces Ud. no es despreciado.

P3: Si Ud. es ilógico entonces Ud. es despreciado.

Luego; p: Ud. Es un niño. q: Ud. Es lógico. r: Ud. Puede domar un cocodrilo

s: Ud. es despreciado.

P1. $p \rightarrow \neg q$

P2: $r \rightarrow \neg s$

P3: $\neg q \rightarrow s$

$\therefore p \rightarrow \neg r$

De P1 y P3 por Transitividad se deduce (*) $p \rightarrow s$.
 Contrareciproca a P2 y se obtiene $s \rightarrow \neg r$ que con el
 resultado anterior (*) podemos concluir que: $p \rightarrow \neg r$

Finalmente, y pasando el resultado obtenido a lenguaje natural obtendremos lo siguiente: ***Si Ud. es un niño entonces no puede domar un cocodrilo.***

Ejemplo 5:

Qué conclusión se puede obtener de la frase; “Este hombre o es un abogado o no es un político. No es un abogado”

Solución:

p: Este hombre es un abogado.

q: Este hombre es un político.

1. $p \vee \neg q$

2. $\neg p$

Simbólicamente: $((p \vee \neg q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$ *Silogismo Disyuntivo*

Conclusión: $\neg q$: Este hombre no es un político.

Ejemplo 6:

Qué conclusión se puede obtener del siguiente enunciado:

“Todos los colibríes son espléndidamente coloreados.

Ningún pájaro grande vive de la miel.

Los pájaros que no viven de la miel son de colores apagados.”

p: Ser un colibrí.

q: Ser espléndidamente coloreado.

r: Ser un pájaro grande.

s: Vivir de la miel (Pájaros)

P1. $p \rightarrow q$

P2: $r \rightarrow \neg s$

P3: $\neg s \rightarrow \neg q$

$\therefore p \rightarrow \neg r$

...que traducido al lenguaje natural diría lo siguiente: **“Si sos un colibrí entonces no sos un pájaro grande”**

Ejemplo 7:

Se deja como tarea un ejemplo del estilo de los últimos dos ejercicios para que el alumno lo realice en el práctico.

Qué conclusión se puede obtener del siguiente enunciado:

“Ningún pato baila el vals. Ningún funcionario se rehúsa a bailar el vals. Todas mis aves de corral son patos”

Solución:

p: Ud. Es un pato

q: Ud. baila el vals

r: Ud. es un funcionario

s: Ud. es un ave de corral

Reescribiendo en lenguaje natural el enunciado original tendríamos lo siguiente:

“Si Ud. es un pato entonces Ud. no baila el vals. Si Ud. es un funcionario entonces Ud. baila el vals. Si Ud. es un ave de corral entonces Ud. es un pato”.

Haciendo el pasaje a lenguaje simbólico...

P1. $p \rightarrow \neg q$

P2: $r \rightarrow q$

P3: $s \rightarrow p$

(Cr a P2): P4: $\neg q \rightarrow \neg r \therefore$ de P1 y P4
 $p \rightarrow \neg r$ y si ahora uso este resultado con
 P3 entonces $s \rightarrow \neg r$

 $\therefore s \rightarrow \neg r$

Finalmente pasamos la conclusión a lenguaje natural completando el ciclo y finalizando el ejercicio:

“Si Ud. es un ave de corral entonces Ud. no es un funcionario”

COMPUERTAS LOGICAS

Las compuertas lógicas es una parte fundamental y el principio básico de la electrónica, generalmente las compuertas presentan en sus salidas unos niveles de tensión en función de las tensiones en su entrada, es decir si se asignan el valor 1 a las tensiones más altas y el valor 0 a las más bajas el convenio utilizado se denomina lógica positiva, si por el contrario se asigna el valor 1 a las tensiones más bajas y el valor 0 a las tensiones más altas el convenio utilizado se denomina lógica negativa.



Cada uno de las compuertas lógicas se representan mediante un símbolo y la operación que realiza se le conoce como operación lógica todas las compuertas que vamos a ver en esta sección corresponden a una tabla, llamada tabla de la verdad.

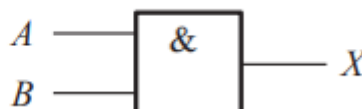
COMPUERTA AND

La puerta AND es una de las puertas básicas con la que se construyen todas las funciones lógicas. Una puerta AND puede tener dos o más entradas y realiza la operación que se conoce como multiplicación lógica.

El término puerta se usa para describir un circuito que realiza una operación lógica básica. La puerta AND tiene dos o más entradas y una única salida



(a) Símbolo distintivo



(b) Símbolo rectangular, identificado mediante el carácter AND (&)

La puerta AND genera una salida a nivel ALTO sólo cuando todas las entradas están a nivel ALTO. Cuando cualquiera de las entradas está a nivel BAJO, la salida se pone a nivel BAJO. Por tanto, el propósito básico de una puerta AND es determinar cuándo ciertas condiciones de entrada son simultáneamente verdaderas, como indican todas sus entradas estando a nivel ALTO, y producir una salida a nivel ALTO, para indicar que esas condiciones son verdaderas.

Entradas		Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>X</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
1 = ALTO, 0 = BAJO		

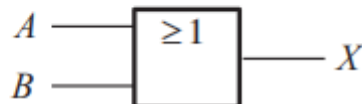
Tabla de la verdad compuerta AND.

COMPUERTA OR

La puerta OR es otra de las puertas básicas con las que se construyen todas las funciones lógicas. Una puerta OR puede tener dos o más entradas y realiza la operación que se conoce como suma lógica. Una puerta OR tiene dos o más entradas y una salida, puede tener cualquier número de entradas mayor o igual que dos. Aunque se presentan ambos tipos de símbolos, distintivo y rectangular



(a) Símbolo distintivo.



(b) Símbolo rectangular con el identificador OR (≥ 1).

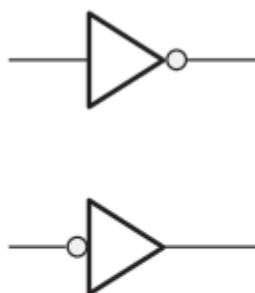
Una puerta OR genera un nivel ALTO a la salida cuando cualquiera de sus entradas está a nivel ALTO. La salida se pone a nivel BAJO sólo cuando todas las entradas están a nivel BAJO. Por tanto, el propósito de una puerta OR es determinar cuándo una o más de sus entradas están a nivel ALTO y generar una salida a nivel ALTO que indique esta condición.

Entradas		Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>X</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1
1 = ALTO, 0 = BAJO		

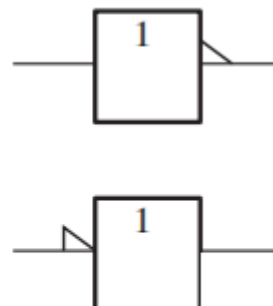
Tabla de la verdad compuerta OR.

COMPUERTA NOT

Realiza la operación denominada inversión o complementación. El inversor cambia un nivel lógico al nivel opuesto. En términos de bits, cambia un 1 por un 0, y un 0 por 1.



(a) Símbolos distintivos con indicadores de negación.



(b) Símbolos rectangulares con indicadores de polaridad.

El indicador de negación es un “círculo” (0) que indica inversión o complementación, cuando aparece en la entrada o en la salida de un elemento lógico. Generalmente, las entradas se sitúan a la izquierda del símbolo lógico, y la salida a la derecha. Cuando en la entrada hay un círculo, quiere decir que el estado activo o verdadero de la entrada es 0, y se dice que la entrada es activa a nivel BAJO. Cuando el círculo se sitúa en la salida significa que el estado activo o verdadero de salida es 0, y se dice que la salida es activa a nivel BAJO. La ausencia de círculo en la entrada o en la salida significa que el estado activo o verdadero es 1 y, en este caso, se dice que la entrada o la salida es activa a nivel ALTO. El indicador de polaridad o de nivel es un “triángulo” que indica inversión cuando aparece a la entrada o a la salida de un elemento lógico.

Entrada	Salida
BAJO (0)	ALTO (1)
ALTO (1)	BAJO (0)

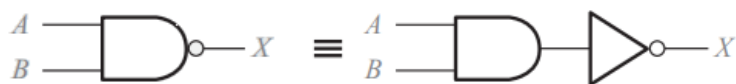
Tabla de la verdad compuerta NOT.

COMPUERTAS LÓGICAS COMBINADAS.

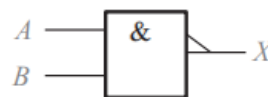
Al agregar una compuerta NOT a cada una de las compuertas anteriores los resultados de sus respectivas tablas de verdad se invierten, y dan origen a tres nuevas compuertas llamadas NAND, NOR y NOR-EX y OR-EX vamos a ver como son y cuál es el símbolo que las representa...

Compuerta NAND

Responde a la inversión del producto lógico de sus entradas, en su representación simbólica se reemplaza la compuerta NOT por un círculo a la salida de la compuerta AND. La puerta NAND genera una salida a nivel BAJO sólo cuando todas las entradas están a nivel ALTO. Cuando cualquiera de las entradas está a nivel BAJO, la salida se pondrá a nivel ALTO. Para el caso concreto de la puerta NAND de dos entradas



(a) Símbolo distintivo, puerta NAND de dos entradas y su equivalente NOT/AND.



(b) Símbolo rectangular, puerta NAND de dos entradas con indicador de polaridad

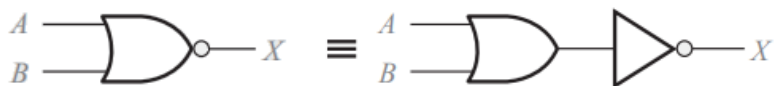
En una puerta NAND de dos entradas, la salida X es un nivel BAJO si las entradas A y B están a nivel ALTO; X es un nivel ALTO si A o B están a nivel BAJO o si ambas, A y B, están a nivel BAJO.

Entradas		Salida
A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0
1 = ALTO, 0 = BAJO		

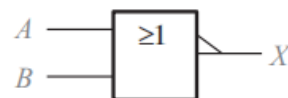
Tabla de la verdad compuerta NAND.

Compuerta NOR.

La puerta NOR, al igual que la puerta NAND, es un útil elemento lógico porque también se puede emplear como una puerta universal; es decir, las puertas NOR se pueden usar en combinación para implementar las operaciones AND, OR y del NOT. La puerta NOR genera una salida a nivel BAJO cuando cualquiera de sus entradas está a nivel ALTO. Sólo cuando todas sus entradas estén a nivel BAJO, la salida se pondrá a nivel ALTO. Para el caso concreto de la puerta NOR de dos entradas.



(a) Símbolo distintivo, puerta NOR de 2 entradas y su equivalente NOT/OR



(b) Símbolo rectangular, puerta NOR de 2 entradas con indicador de polaridad

En una puerta NOR de dos entradas: la salida X es un nivel BAJO si cualquiera de sus entradas A o B está a nivel ALTO, o si ambas entradas A y B están a nivel ALTO; X es un nivel ALTO si A y B están a nivel BAJO.

Entradas		Salida
A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
1 = ALTO, 0 = BAJO		

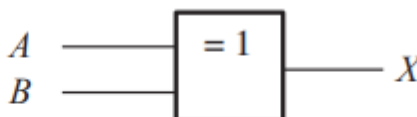
Tabla de la verdad compuerta NOR.

COMPUERTA OR-exclusiva.

La puerta XOR tiene sólo dos entradas. La salida de una puerta OR-exclusiva se pone a nivel ALTO sólo cuando las dos entradas están a niveles lógicos opuestos. Esta operación se puede expresar, en función de dos entradas A y B y una salida X .



(a) Símbolo distintivo



(b) Símbolo rectangular con la puerta XOR

En una puerta OR-exclusiva, la salida X es un nivel ALTO si la entrada A está a nivel BAJO y la entrada B está a nivel ALTO; o si la entrada A está a nivel ALTO y la entrada B está a nivel BAJO; X es un nivel BAJO si tanto A como B están a nivel ALTO o BAJO.

Entradas		Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>X</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

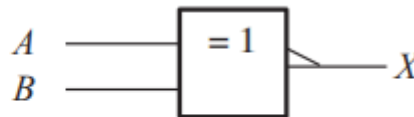
Tabla de la verdad compuerta OR-exclusiva.

COMPUERTA NOR-exclusiva

La puerta NOR-exclusiva (XNOR). Al igual que la puerta XOR, la puerta XNOR sólo tiene dos entradas. El círculo en la salida del símbolo de la puerta XNOR indica que su salida es la opuesta a la de la puerta XOR. Cuando dos niveles lógicos de entrada son opuestos, la salida de la puerta NOR-exclusiva es un nivel BAJO



(a) Símbolo distintivo



(b) Símbolo rectangular

En una puerta NOR-exclusiva, la salida *X* es un nivel BAJO si la entrada *A* está a nivel BAJO y la entrada *B* está a nivel ALTO, o si *A* está a nivel ALTO y *B* está a nivel BAJO; *X* es un nivel ALTO si *A* y *B* están ambas a nivel ALTO o BAJO.

Entradas		Salida
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>X</i>
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

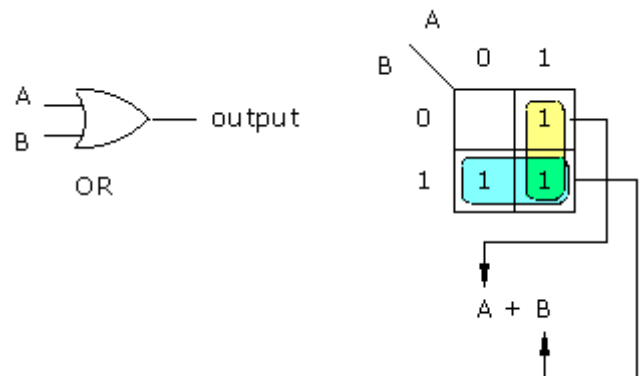
Tabla de la verdad compuerta NOR-exclusiva.

Mapas de Karnaugh

¿Qué es un mapa de Karnaugh?

Un mapa de Karnaugh provee una manera alternativa de simplificación de circuitos lógicos. En lugar de usar las técnicas de simplificación con el álgebra de Boole, Ud. puede transferir los valores lógicos desde una función booleana o desde una tabla de verdad a un mapa de Karnaugh. El agrupamiento de ceros 0 y unos 1 dentro del mapa le ayuda a visualizar las relaciones lógicas entre las variables y conduce directamente a una función booleana simplificada.

El mapa de Karnaugh es a menudo usado para simplificar los problemas lógicos con 2, 3 o 4 variables. Un mapa de Karnaugh de 2 variables es trivial pero puede ser usado para introducir el método que necesite aprender. El mapa para una puerta OR de dos entradas es como sigue: Los valores de una variable aparecen sobre la parte superior del mapa, definiendo los valores de la columna, mientras los valores de la otra variable aparecen a un lado, definiendo los valores de la variable en cada fila.



El mapa de Karnaugh se va completando colocando los unos "1" en la celda apropiada, ayudados por la tabla de verdad. Esta agrupación es conocida como **minitérminos** o **minterms** y como expresión booleana viene a ser una **suma de productos**. Usualmente no se escriben los ceros "0" en la tabla, ya que solo se agrupan los unos "1".

Input A	Input B	Output Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

En el mapa las celdas adyacentes que contienen unos 1 se agrupan de a dos, de a cuatro, o de a ocho. En este caso, hay un grupo horizontal y otro vertical que puede agruparse de a dos. Se indican los agrupamientos dibujando un círculo alrededor de cada uno "1".

El grupo horizontal corresponde al valor de $B = 1$, y esta variable no cambia de valor, se mantiene. En esta misma fila, en la celda de la izquierda $A = 0$ y en la de la derecha $A = 1$, es decir la variable A cambia de valor. En otras palabras, el valor de la variable A no afecta al resultado final de la expresión booleana para estas celdas. Antes de agruparlas, debería haber escrito la expresión booleana para estas dos celdas como:

$$\overline{A} \cdot B + A \cdot B \text{ Después}$$

de agruparlas esta misma expresión se reduce a:

B

De una forma similar, el grupo vertical de dos celdas podría haber sido escrito como:

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

Desde el mapa, Ud. puede ver que el valor de B no afecta el valor escrito en las celdas para este grupo. En otras palabras, el grupo vertical se reduce a:

A

De esta manera, el mapa de Karnaugh conduce a la expresión final:

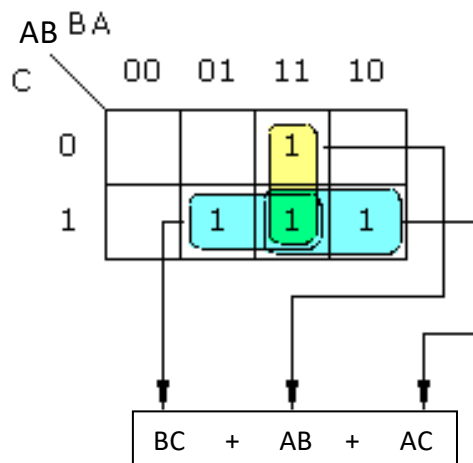
$$A + B$$

Esto no es muy emocionante, pero si se aplica el mismo método a un problema de lógica más compleja, comenzara a entender cómo el mapa de Karnaugh conduce a simplificar las funciones booleanas.

Mapa de Karnaugh de 3 variables

Aquí está la tabla de verdad para un sistema de votación por mayoría de 3 personas La tabla de verdad se convierte en un mapa de Karnaugh como sigue:

Observe cuidadosamente las variables en la parte superior del mapa de Karnaugh. Estas **no** están escritas de forma ordenada 00, 01, 10, 11 en binario. De hecho, cada columna **diffiere** de la columna



A	B	C	salida
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

previa justo en un solo bit. Esto es conocido como código **Grey** y esto es esencial para que tu mapa de Karnaugh trabaje y que Ud. Introduzca los valores de la columna en este orden.

En el mapa de Karnaugh Ud. puede identificar 3 grupos de a dos “1”, como está indicado. El grupo horizontal del lado izquierdo combina las celdas (A.B.C) y (A.B.C). Dentro de este grupo el valor de A cambia, esto significa que esta variable, A, no afecta los valores de las celdas. Entonces A puede ser eliminada de la expresión, quedando (B.C).

Operando sobre los otros grupos de forma similar observamos que en el agrupamiento horizontal de “1” de la derecha, que incluye los términos (*minitérminos*) (A.B.C) y (A.B.C), la variable que cambia es la B por lo tanto se puede eliminar y quedaría (A.C).

Por último, la agrupación de “1” vertical involucra los términos (*minitérminos*) (A.B.C) y $\overline{(A.B.C)}$ lo que da como resultado que cambie la variable C y es ésta la que se puede eliminar quedando: (A.B).

El resultado o expresión final simplificada es: $A.B + A.C + B.C$

Con un poco de práctica, este método va a ser más rápido que la alternativa de simplificar la expresión booleana derivada de la tabla de verdad como **suma de productos (*minitérminos*)**, que resulta bastante complicada:

$$A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C$$

Mapa de Karnaugh de 4 variables

Un mapa de 4 variables (A, B, C y D) contiene $2^4 = 16$ celdas. Es importante escribir los valores de las variables en las filas y columnas respetando el código Grey.

Para simplificar la expresión: $\overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + A.B.C.D + \overline{A}.B.C.D$

$$x = \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.B.C.D + A.B.C.D$$

AB BA		CD			
		D	C		
		00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

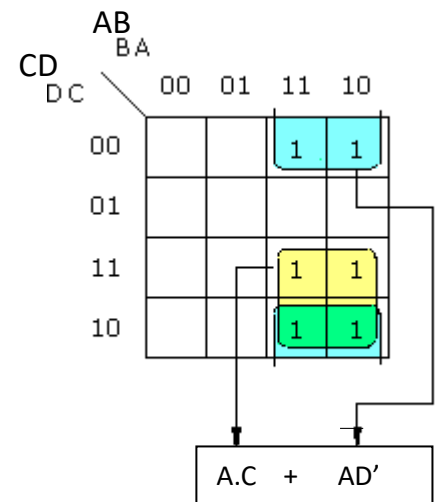
Esta expresión puede simplificarse un poco usando el álgebra de Boole y agrupando los minitérminos resaltados con el mismo color:

$$x = \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.B.C.D + A.B.C.D$$

El mapa de Karnaugh de dicha expresión es el de la derecha:

Para dar la expresión booleana más simple Ud. debería agrupar el mayor número de términos o de celdas, en lo posible de a 4.

En este caso se han redondeado y agrupado dos grupos de 4 “1s”, uno de los cuales lo hace con dos “1s” de la parte superior y otros dos en la parte inferior del mapa. Debe identificar qué variables de cada grupo se mantienen constantes, sin cambiar de “1” a “0” o viceversa, y elimine aquellas variables que sí cambian. En nuestro caso hay 2 que cambian y otras 2 que no cambian. La expresión final simplificada será: $x = A.C + A.D'$



PRACTICO

Practico1

1. Determinar cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones:
 - a) Neil Armstrong camino sobre la luna.
 - b) ¡Márchate!
 - c) $2+x=6$; $x=3$
 - d) El pato Donald es una caricatura.
 - e) ¿Qué estás haciendo?
 - f) Del campo a la ciudad
 - g) Quince es un número impar
 - h) $(a+b)$ es un numero positivo.
 - i) $2+7=10$

2. Traducir a la forma simbólica los siguientes enunciados. Escriba previamente las proposiciones simples que intervienen.
 - a) Julia no es está cantando.
 - b) No es cierto que el haya sacado la lotería y se haya comprado una casa
 - c) No voy a ir al Gimnasio y no voy a trotar
 - d) Roberto camina o salta o está quieto.
 - e) Juan está cantando, siendo feliz y tocando la guitarra.
 - f) Si corro por la verde pradera y no tomo agua entonces veo luces de colores.

3. Traducir de la forma simbólica al lenguaje común.

Siendo p: Laura juega al truco
 q: Laura toca el piano
 r: Juan canta
 t: Juan silva

 - a) $(\neg p) \vee q$
 - b) $r \text{ xor } q$
 - c) $(p) \wedge q \wedge r$
 - d) $\neg r \rightarrow t$
 - e) $(p) \vee q \vee r$
 - f) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$

4. Hacer la tabla de verdad de las siguientes expresiones:

a) $(\neg p) \wedge (\neg q) \rightarrow (p \vee q)$

b) $(\neg p) \vee (\neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$

c) $(p \vee q) \vee (p \wedge q)$

d) $(p \vee q) \vee (\neg r)$

e) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$

f) $(r) \wedge [(p \vee q) \wedge (\neg r)]$

g) $(p) \vee (\neg(\neg q)) \rightarrow \neg(p \wedge q)$

h) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg[(\neg p) \wedge (\neg q)]$

Practico 2

1. Obtener la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $(\neg p \wedge (\neg q))$
- b) $(r \wedge \neg s)$
- c) $(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
- d) $[(p \vee q) \wedge (\neg r)] \wedge r$
- e) $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q)$
- f) Si p: “La luna orbita la tierra” y q: “El mercurio es un líquido”, pasar a lenguaje natural los ejercicios a) c) y e)

2. Traduzca las oraciones de los siguientes problemas a la forma si entonces (en lenguaje natural) y luego a la forma simbólica.

- a) Tendrás éxito solamente si aprecias la opinión de los demás.
- b) Iré el sábado si me pagan.
- c) Todo le sucede a todo el mundo tarde o temprano si hay tiempo suficiente.
(G. B. Shaw)
- d) Juan es razonable solo si sabe todos los hechos.
- e) $y^2=4$ es una condición necesaria para que $y=2$.
- f) Estudiar durante las vacaciones nos garantiza el éxito.
- g) Si $7+9=16$, entonces $16-9=7$
- h) Tú eres millonario solo si el ratón Mickey tiene 65 años.

3. Sea p: “Los patos son palmípedos” y q: “Los pingüinos son aves”

Traducir cada una de las siguientes proposiciones al lenguaje común:

- a) $p \rightarrow q$
- b) $\neg p \vee q$
- c) $[p \vee (\neg p)] \rightarrow q$
- d) $\neg p \rightarrow q$

4. Escribir la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de las siguientes proposiciones:

- a) Si quebrantas la ley entonces vas a la cárcel.
- b) Si p entonces q
- c) $\neg p \rightarrow (\neg q)$
- d) El sol brilla solo si cuatro por cinco es veinte.

- e) Si la dinámica de Newton es correcta entonces la fuerza es igual a la masa por la aceleración.
 - f) Si la valencia del carbono es cuatro entonces los cicloalcanos no son orgánicos.
 - g) Si el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento entonces la fuerza es igual la masa por la aceleración.
 - h) Si el símbolo del plomo es **Pb** entonces el **uranio 238** no es un elemento radioactivo.
5. Escriba cada par de proposiciones dadas como una proposición empleando el conectivo apropiado:
- a) i. Si el señor Casimiro está en condiciones de comprar un coche nuevo, entonces puede costárselo.
ii. Si el señor Casimiro puede costearse un coche nuevo, entonces puede comprarlo.
 - b) i. Si ABC es un triángulo rectángulo entonces $a^2+b^2=c^2$.
ii. Si $a^2+b^2=c^2$ entonces ABC es un triángulo rectángulo.
 - c) i. Si $x.y=0$ entonces $x= 0$ o $y=0$
ii. Si $x=0$ o $y=0$ entonces $x.y=0$
 - d) i. Si el fiscal puede probar la culpabilidad de Octavio entonces el juez el juez lo sentencia.
ii. Si el juez sentencia a Octavio entonces el fiscal puede probar su culpabilidad.
6. i. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg p \vee q$
ii. Usando tablas de verdad, demuestre que $p \rightarrow (\neg q)$ es equivalente a $(\neg p \vee \neg q)$
7. Indique cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes a la proposición:
“Si Heriberto gana el concurso entonces hizo trampa”
(Suponga que “Heriberto es honrado” equivale a “Heriberto no es tramposo”)
- a) Heriberto gana el concurso y es tramposo.
 - b) Heriberto, una persona honrada, no gana el concurso.
 - c) Si Heriberto es honrado entonces no gana el concurso.
 - d) No es cierto que: Heriberto gana o es tramposo.
 - e) Si Heriberto es tramposo, entonces gana el concurso.

8. Indique cuales de las siguientes proposiciones son equivalentes a la proposición:

“Si Irma es culpable entonces estuvo en el escenario del crimen”

(Suponga que “Irma no es culpable” equivale a “Irma es inocente”)

- a) Si Irma estuvo en el escenario del crimen entonces es inocente.
 - b) Irma es inocente o estuvo en el escenario del crimen.
 - c) Si Irma no estuvo en el escenario del crimen entonces es inocente.
 - d) Si Irma estuvo en el escenario del crimen entonces es culpable.
 - e) Irma es culpable y no estuvo en el escenario del crimen.
 - f) Si Irma es inocente entonces no estuvo en el escenario del crimen.
9. Demuestre las siguientes equivalencias lógicas utilizando solamente leyes de equivalencia y/o propiedades de la lógica (no utilice tablas de verdad). Justifique cada paso.

$$a) (p \vee q) \Leftrightarrow \neg[(\neg p) \wedge (\neg q)] \quad b) \neg([p \wedge \neg q] \wedge [p \vee \neg q]) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Practico 3

Ejercicio 1:

1. En cada caso mencione que tautología se aplica:

- a) Si ello no es inverosímil entonces es verosímil.
- b) Suficiente es suficiente.
- c) El hombre es justo o injusto.
- d) Si $x+2=0$ entonces $x = -2$

$x \neq -2$

Por lo tanto $x+2 \neq 0$

- e) Si la zorra veloz salta sobre el perro lento, entonces se tropieza. Por lo tanto, si la zorra veloz no se tropieza, entonces no salta sobre el perro lento.
- f) Si Víctor juega ajedrez, entonces es inteligente.

Víctor juega ajedrez

Por lo tanto, Víctor es inteligente.

2. Mencione que falacia se aplica en cada caso y hacer la tabla de verdad para la parte a)

- a) Si Alicia bebe de la botella que dice veneno, 'enfermara'.

Alicia bebe de una botella que no dice veneno.

Por lo tanto no 'enfermara'

- b) Si una persona lee el diario entonces está bien informada.

Esta persona no lee el diario.

Por lo tanto esta persona no está bien informada.

Ejercicio 2:

Obtener una conclusión válida empleando todas las proposiciones que se dan a continuación:
(Aclaración importante: la conclusión a la que llegue expresarla en lenguaje natural)

“Si Ud. Juega al ajedrez entonces, o mueve algún peón un lugar o mueve algún peón 2 lugares.
Si mueve algún peón un lugar o mueve algún peón 2 lugares entonces conoce como se mueven los peones en la apertura.

Si no domina la teoría de aperturas entonces no conoce cómo se mueven los peones.

Ud. No domina teoría de aperturas.”

Ejercicio 3:

Probar la validez de los siguientes razonamientos - en cada caso referir que ley usa y de qué manera la emplea:

- a) 1. $p \rightarrow q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. p
4. $(r \vee s)$
5. $s \rightarrow (\neg t \vee \neg q)$

 $\therefore (\neg t \vee \neg q)$

- b) 1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $r \rightarrow \neg(\neg t)$
4. $\neg t$
5. $\neg p \rightarrow (r \vee s)$
6. $\neg s$

 $\therefore r$

- d) 1. $(p \vee q)$
2. $\neg p$
3. $q \rightarrow r$
4. $r \rightarrow (s \rightarrow t)$
5. $\neg t$
6. $(s \vee w)$

 $\therefore w$

- e) 1. $(\neg p \vee q)$
2. $q \rightarrow r$
3. $\neg r$

 $\therefore \neg p$

c) Demuestre: $\neg p$

$$P1: p \rightarrow \neg q$$

$$P2: \neg r \rightarrow q$$

$$P3: \neg r \vee s$$

$$P4: \neg s$$

Ejercicio 4:

En cada caso mencione que tautología se aplica y complete los razonamientos (cuando corresponda) para que estos sean válidos.

g) “..ser o no ser..”

h) “..o sale el coche 1 o sale el coche 2..”

“..no sale el coche 1..”

Por lo tanto, Sale el coche 2

i) Si $a > b$ entonces $2.a > 2.b$

j) Si $2.a > 2.b$ entonces $2.a.k > 2.b.k$

Por lo tanto Si $a > b$ entonces $2.a.k > 2.b.k$ (con $a, b, k > 0$)

k) Si Juanito sale al jugar al futbol entonces se siente feliz

Juanito sale a jugar al futbol

Por lo tanto, se siente feliz

l) Si hago mucho deporte entonces estoy cansado

No estoy cansado

Por consiguiente, no hago mucho deporte

Ejercicio 5:

Determine la opción correcta para que la siguiente fórmula proposicional sea falsa:

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge ((r \rightarrow \neg p) \wedge q) \rightarrow r$$

- a) $p = 0; q = 1; r = 0$
- b) $p = 1; q = 1; r = 0$
- c) $p = 0; q = 0; r = 0$
- d) $p = 0; q = 1; r = 1$
- e) $p = 1; q = 0; r = 0$

Ejercicio 6:

Si la fórmula $\{(p \vee q) \wedge q \wedge (r \rightarrow \neg p)\} \rightarrow \neg r$ es falsa, entonces, es verdad que:

- a) $p \equiv 1; q \equiv 1, r \equiv 1$
- b) $p \equiv 0; q \equiv 1, r \equiv 0$
- c) $p \equiv 0; q \equiv 0, r \equiv 1$
- d) $p \equiv 0; q \equiv 1, r \equiv 1$
- e) $p \equiv 1; q \equiv 0, r \equiv 1$

Ejercicio 7:

Determinar los valores de verdad de p y r teniendo en cuenta que:

$$[(p \rightarrow q) \vee (q \vee \neg r)] \leftrightarrow (\neg q \wedge r) \text{ es falsa y } [(p \rightarrow q) \vee (q \vee r)] \equiv 0$$

Ejercicio 8:

Determinar los valores de verdad de p , q y r teniendo en cuenta que

$$[(p \wedge q) \rightarrow \neg q] \vee (q \wedge r) \text{ es falsa.}$$

Ejercicio 9:

Determinar los valores de verdad de p , q y r teniendo en cuenta que

$$[(p \rightarrow q) \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow r \text{ es verdadera y que } \neg r = 1.$$

Ejercicio 10:

Si la fórmula $[(p \vee \neg q) \wedge r \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (\neg p \vee s)$ es falsa, entonces, resolverla!

Practico 4*Ejercicio 1:*

Sea f una función lógica en su forma canónica / $f = \overline{A}\overline{B}C + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$.

Se pide:

- Escribir la tabla de verdad para f .
- Armar su mapa de Karnaugh.
- Determinar f_r (función reducida).
- Dibujar el circuito lógico (para f_r).

Ejercicio 2:

Dado el siguiente mapa de Karnaugh (según figura) determinar:

- Función lógica, en su forma canónica.
- Escribir la tabla de verdad para f .
- Determinar f_r (función reducida).
- Dibujar el circuito lógico (para f_r).

		xy			
z		00	01	11	10
	1		1	1	
	0		1		1

*Ejercicio 3:**Problema de la alarma...*

Requerimientos: Diseñe un circuito de control para una alarma contra incendios con las siguientes características; tiene la opción de ser activada en forma manual desde un interruptor el cual siempre dispara la alarma, adicionalmente tiene un sensor de humo y uno de temperatura los cuales dispara la alarma solo si los dos están accionados. Se pide además que el circuito este optimizado.

Ejercicio 4:

- Diseñar un circuito que sea capaz de detectar los números primos entre cero y diez, planteando tabla de verdad, función en su forma canónica, mapa de Karnaugh y función reducida.
- Ídem anterior para la detección de ternas con mayoría unos.

Ejercicio 5:

Dado los siguientes mapas de Karnaugh plantear tabla de verdad, función en su forma canónica y función reducida:

(1)

xy					
z		00	01	11	10
	1			1	1
	0	1	1		

(2)

xy					
z		00	01	11	10
	1	1	1		1
	0	1			

Ejercicio 6:

Dadas las siguientes funciones lógicas determinar: tabla de verdad, función en su forma canónica, mapa de Karnaugh y función reducida.

a) $f_1 = ABC + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

b) $f_2 = \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC$

c) $f_3 = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

d) $f_4 = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC$

Referencias:

Fuente de la información:

https://homepages.westminster.org.uk/electronics/Sixth%20Form/karnaugh_maps.htm

Introducción a la Lógica Simbólica – Karl J. Smith

Lógica Matemática I – Enrry Castillo P, Maritza Alexandra Pinta

Universidad Técnica de Machala

Keneth Rosen Matemática discreta y sus aplicaciones

<http://incitechnology.com/compuertas-logicas/>